

ADAPTAÇÃO DO PROGRAMA SAP-IV VISANDO A ANÁLISE
DINÂMICA DE ESTRUTURAS COM MOVIMENTOS
DE CORPO RÍGIDO

Pi. 220

VI CONGRESO PANAMERICANO DE INGENIERIA NAVAL, TRANSPORTE
MARITIMO E INGENIERIA PORTUARIA

Veracruz y Cd. de México, 16 al 22 de Septiembre de 1979

ADAPTAÇÃO DO PROGRAMA SAP-IV VISANDO A ANÁLISE DINÂMICA DE
ESTRUTURAS COM MOVIMENTOS DE CORPO RÍGIDO.

AUTOR: CARLOS ALBERTO NUNES DIAS - Mestre em Engenharia Na
val (NDPN-EPUSP)

R E S U M O

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um modelo matemático, dentro da técnica dos elementos finitos, para a análise de vibrações de estruturas com movimentos de corpo rígido, pela adaptação do programa SAP-IV.

Adicionalmente, procura relacionar os principais aspectos que devem ser de conhecimento do analista, numa análise pelo emprego do programa, de modo a capacitá-lo para um estudo eficiente (em termos de viabilizar tempo de processamento e qualidade dos resultados) de um problema estrutural dinâmico.

A B S T R A C T

This paper presents the development of a mathematical model, using the finite element method, for the dynamical analysis of rigid body motions structures. The program was derived from SAP-IV and adapted to perform the above mentioned analysis.

In addition, it is tried to point out the main detail that the analyst must know in a program analysis, so that he will be able to perform an efficient job when solving a dynamic structural problem.

Simbologia

A indicação do cálculo de determinante de matrizes quadradas será feita pelo acréscimo do prefixo det, quando se fizer referência ao nome, ou duas barras (cercando os elementos), quando se fizer referência a matriz por seus elementos.

Matrizes diagonais, quando referenciadas pelos elementos da diagonal, receberão em sua designação o prefixo diag.

Quando se fizer referência a matrizes ou vetores pelos elementos, estes virão cercados por colchetes ou chaves, respectivamente.

n : número de graus de liberdade. Deve-se notar que a distinção entre graus de liberdade cinemáticos e dinâmicos fica perceptível no desenvolvimento do texto.

t : tempo

$V(t)$: vetor dos deslocamentos nodais. Elementos: $v_i(t), i=1,2,\dots,n$

$\dot{V}(t)$: vetor das velocidades nodais: Elementos: $\dot{v}_i(t), i=1,2,\dots,n$

$\ddot{V}(t)$: vetor das acelerações nodais: Elementos: $\ddot{v}_i(t), i=1,2,\dots,n$

$P(t)$: vetor dos esforços externos aplicados.

M : matriz de massa.

C : matriz de amortecimento.

K : matriz de rigidez

F : matriz de flexibilidade

ϕ : matriz dos autovetores. Elementos: $\phi_i, i = 1, n$

- Λ : matriz diagonal dos autovalores. Elementos: escalares
 $\lambda_i, i = 1, n$
- I : matriz identidade
- $Y(t)$: vetor dos deslocamentos, em coordenadas generalizadas.
- p : número de autovalores procurados
- q : número inteiro positivo tal que, $p < q < n$
- K : matriz de rigidez deslocada
- β : constante real para deslocamento
- $\hat{\Lambda}$: matriz diagonal dos autovalores do problema deslocado.
- λ_i : autovalor, $i=1,2,\dots$
- $\hat{\lambda}_i$: autovalor do problema deslocado, $i=1,2,\dots$
- w_i : frequência (circular) natural, $i=1,2,\dots$
- \hat{w}_i : frequência (circular) natural do problema deslocado.
- k_i : valor da constante de mola aplicada segundo o i -ésimo grau de liberdade, $i=1,2,\dots$
- m_i : i -ésimo elemento da matriz diagonal de massas discretas.
- ξ_i : grau de amortecimento modal; i -ésimo modo
- w_{Di} : frequência natural amortecida i -ésimo modo
- $p_i(t)$: carga generalizada.
- \bar{w} : frequência da excitação harmônica.
- a : amplitude da excitação harmônica.
- b : valor médio da excitação harmônica.
- δ : fase da excitação harmônica.
- $Y_i(t)$: resposta modal i -ésimo modo. Elementos do vetor $Y(t)$.

I. Introdução

Desde mil novecentos e setenta e quatro existe, no Departamento de Engenharia Naval da EPUSP, a equipe do projeto NDPN-420; formada com a finalidade de prover recursos técnicos, dentro da área de análise estrutural por elementos finitos, em projeto estrutural do navio. Estabelecendo desde o início conhecimento científico adaptado, fundamentalmente, às necessidades e à realidade brasileiras.

Assim sendo, a partir daquela data tratamos da implantação de um sistema para análise de estruturas navais, tendo como ponto de partida o conhecimento científico adquirido pela importação do programa SAP (A Structural analysis program for static and dynamic response of linear systems), já em sua quarta versão, SAP-IV, [6]. Desde então, temos absorvido tais conhecimentos e desenvolvidos outros de modo que hoje podemos nos considerar, em termos de capacidade desenvolvida e implantada, em nível de conhecimento bastante próximo do que há de melhor nesta área da engenharia.

Um aspecto importante a considerar em nosso trabalho diz respeito à adaptação, do que se dispunha para análise de estruturas típicas em engenharia civil, tendo em vista a análise de estruturas navais. Como foi o caso do estudo de vibrações de viga navio, cujos procedimentos de adaptação serão aqui apresentados.

II. O Método dos elementos finitos, visando a análise dinâmica de corpos livres

II.1 Introdução

Entendemos por análise dinâmica de corpos livres aquela estendida a estruturas que, embora deformáveis, não possuem vinculação externa de modo a impedir movimentos de corpo rígido (sem deformação).

Como já mencionado no capítulo anterior, a partir do programa SAP-IV houve a necessidade de adaptação a esse tipo de análise. Já que, sendo não restrita a ocorrência de movimentos de corpo rígido, a matriz de rigidez é singular; situação não aceita pelas rotinas do referido programa.

Inicialmente procuramos na literatura subsídios que nos auxiliassem a resolver o problema de adaptação. No entanto, de modo geral encontramos apenas pequenas referências ao assunto, [3], [4], ou tratamentos matemáticos que exigiriam grandes modificações no programa, [10]. Assim, com base nos conceitos sobre o assunto abordados em [3], [4] e [10] procuramos estabelecer formulação, no cálculo de frequências naturais e de resposta a excitação de estruturas - com movimentos de corpo rígido, que viesse de encontro às técnicas já utilizadas pelo programa.

II.2 O problema estrutural de autovalores e autovetores

Na análise dinâmica de sistemas estruturais é ex

tremamente importante o conhecimento de seus modos e frequências naturais. Seja para posterior verificação de ressonância, seja para o cálculo da resposta a qualquer tipo de excitação. Numa análise de frequências naturais por elementos finitos de um sistema estrutural, o seguinte problema de autovalores e autovetores deve ser resolvido, [2], [3]:

$$(II.1) \quad K \cdot \Phi = M \cdot \Phi \cdot \Lambda \quad (n \text{ graus de liberdade})$$

O programa SAP-IV pode utilizar dois algoritmos na solução de (II.1)

- Método de Busca do Determinante; aconselhável em problemas que requeiram pouca capacidade de armazenagem de dados.
- Método de Iteração por Subespaço; aconselhável na solução de problemas maiores, onde haja a necessidade de utilização de memórias auxiliares, em fitas ou discos magnéticos.

Não pretendemos colocar aqui considerações profundas no que diz respeito às vantagens de um método sobre outro. O método de iteração por subespaço tem demonstrado ser um dos mais eficientes algoritmos na análise de frequências, onde um número relativamente grande de modos são requeridos. No entanto, sua eficiência não deixa de ser comparável à do método de pesquisa de determinante, mesmo em problemas com poucos graus de liberdade.

Para o usuário do programa a diferença básica do segundo método em relação ao primeiro é o fato de que, pela

aplicação desse, não se pode extrair tantas frequências quantos forem os graus de liberdade com massa associada, $|2|$, $|7|$.

Os algoritmos utilizados na solução de (II.1) baseiam-se na hipótese inicial de que a matriz de rigidez é positiva definida. Portanto, sistemas com movimentos de corpo rígido (com frequências naturais iguais a zero) não podem ser tratados diretamente.

O procedimento mais imediato para eliminar a singularidade da matriz de rigidez é adicionar pequenas constantes de mola, segundo graus de liberdade não restritos, de modo a impedir movimentos de corpo rígido. Analiticamente, essas constantes de mola são representadas por termos adicionais nos elementos da diagonal principal da matriz de rigidez. Caso a ordem de grandeza dessas constantes de mola seja pequena quando comparada com os termos originais da diagonal principal, esse procedimento tem efeito provavelmente desprezível no resultado final do cálculo, e em adição aparecerá um conjunto de modos de corpo rígido (com pequenas deformações), associados a valores de frequências naturais próximas de zero. No SAP-IV a resolução da equação de autovalores e autovetores recai no processo de eliminação de Gauss, ou no método generalizado de Jacobi, $|2|$, $|6|$. De modo que qualquer singularidade tendendo a zero na posição da diagonal principal pode acarretar erro na resolução. Fato que torna o procedimento, ora sugerido, nem sempre eficiente.

Um procedimento mais eficiente baseia-se num tratamento matemático conhecido como deslocamento de autovalores ("eigenvalue shift"), [3]. A diferença fundamental deste procedimento matemático, em relação à aproximação física mencionada no parágrafo anterior, reside no fato de que a cada grau de liberdade (com massa associada) é adicionada uma constante de mola com valor proporcional à massa, na posição correspondente da diagonal principal da matriz de rigidez. A matriz de rigidez assim construída, obviamente, não será singular; mesmo que a original o seja. Tal procedimento apresenta a vantagem de não implicar em modificações nas formas normais de vibrar, bem como, permitir uma avaliação perfeita do desvio entre frequências naturais reais e calculadas, sem introdução de erros, como veremos no item seguinte.

II.3 Remoção da singularidade da matriz de rigidez

Seja um sistema estrutural qualquer, discretizado por elementos finitos, com matriz de massa discreta, tal que as frequências naturais ($w_i = \sqrt{\lambda_i}$), são dadas por, [3], [10]:

$$(II.2) \quad \lambda_i = w_i^2 = \frac{\phi_i^T \cdot K \cdot \phi_i}{\phi_i^T \cdot M \cdot \phi_i} = \frac{\phi_i^T \cdot K \cdot \phi_i}{\phi_i^T \cdot \text{diag}[m_i] \cdot \phi_i}; \quad i=1, \dots, n$$

Se a cada grau de liberdade associarmos, em correspondência, um vínculo elástico de valor k_i , as frequências naturais para o novo sistema, assim obtido, serão dadas por:

$$(II.3) \quad \hat{\lambda}_i = \hat{w}_i^2 = \frac{\phi_i^T \cdot [K + \text{diag}[k_i]] \cdot \phi_i}{\phi_i^T \cdot M \cdot \phi_i} = \frac{\phi_i^T \cdot K \cdot \phi_i + \phi_i^T \cdot \text{diag}[k_i] \cdot \phi_i}{\phi_i^T \cdot \text{diag}[m_i] \cdot \phi_i}; \quad i=1, \dots, n$$

onde, implicitamente, admitiu-se a não mudança das formas modais ϕ_i que, como veremos adiante, é uma hipótese válida.

Nossa intenção é a de promover uma distribuição de constantes elásticas (k_i) de maneira a poder avaliar os desvios de λ_i para $\hat{\lambda}_i$. Pela observação de (II.3), vê-se que os desvios serão nulos se:

$$(II.4) \quad \phi_i^T \cdot \text{diag}[k_i] \cdot \phi_i = 0 ; \quad i=1, \dots, n$$

A igualdade de (II.4) será verdadeira se

$k_i = 0 ; \forall i / i=1, 2, \dots, n$ (solução que não nos interessa pois não elimina a singularidade da matriz de rigidez) ou se os vínculos elásticos forem colocados em nós modais.

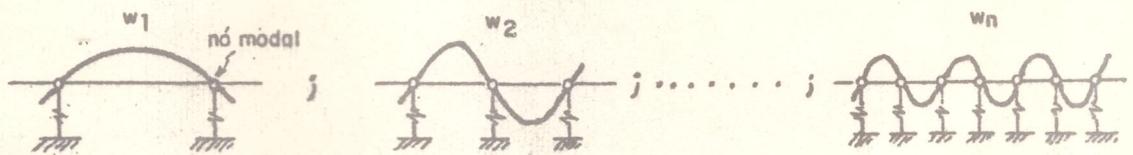


Figura II.1 - Constantes de mola em nós modais

Como se vê, mesmo no caso simples de uma viga livre como na figura II.1, tal solução não apresenta interesse prático quando da utilização de computadores. Já que seria necessário o conhecimento prévio e exato das formas modais, e distribuição de constantes de molas distinta no cálculo isolado de cada uma das frequências. Embora as posições dos nós modais, em alguns casos, possam ser previamente estimadas e as constantes elásticas diferentes de zero possam ser redu

zidas em número (colocando-se uma quantidade necessária e suficiente a fim de restringir movimentos de corpo rígido) e em magnitude, será difícil avaliar os desvios.

Admitamos, então, uma constante β (real e positiva) independente do modo de vibrar, tal que:

$$(II.5) \quad k_i = \beta \cdot m_i \quad ; \quad i=1,2,3,\dots,n$$

De (II.5) resulta que,

$$(II.6) \quad \text{diag}[k_i] = \beta \cdot \text{diag}[m_i] = \beta \cdot M$$

isto é, a cada grau de liberdade do modelo estamos associando constantes elásticas de magnitude proporcional à massa, e de mesma natureza.

Introduzindo (II.6) em (II.3), resulta:

$$(II.7) \quad \hat{\lambda}_i = \lambda_i + \beta; \quad i=1,2,\dots,n$$

ou, utilizando matrizes diagonais de autovalores

$$(II.8) \quad \hat{\Lambda} = \Lambda + \beta I \quad \text{ou} \quad \Lambda = \hat{\Lambda} - \beta I$$

onde I é a matriz identidade de ordem n .

Portanto, para uma distribuição de constantes elásticas promovida segundo o que estabelece (II.5), é possível avaliar exatamente os desvios de $\hat{\lambda}_i$ para λ_i ; sendo todos eles iguais a β . Essa é a transformação conhecida na literatura como "shifting", por nós traduzido como deslocamento.

Substituindo a segunda expressão de (II.8) em (II.1), temos:

$$K \cdot \Phi = M \cdot \Phi \cdot [\hat{\Lambda} - \beta I]$$

que rearranjado dá

$$(II.9) \quad [K-\beta M] \cdot \Phi = M \cdot \Phi \cdot \hat{\Lambda}$$

Por outro lado a matriz de rigidez, após sofrer a transformação proposta, é dada por $\hat{K}=K-\beta.M$, tal que (II.9) reduz-se a:

$$(II.10) \quad \hat{K} \cdot \Phi = M \cdot \Phi \cdot \hat{\Lambda}$$

A equação (II.10) é inteiramente equivalente à (II.1), de modo que é de se esperar que o sistema, após sofrer a transformação de deslocamento, tenha os mesmos auto vetores que o sistema original, $|2|, |3|$.

Uma importante observação a ser acrescentada às discussões anteriores é que, em princípio, num programa é necessário, apenas, algoritmos para calcular autovalores e respectivos autovetores do problema $K \cdot \Phi = M \cdot \Phi \cdot \Lambda$, onde todos os autovalores são maiores do que zero. Uma vez que problemas com autovalores nulos podem ser transformados.

A transformação de deslocamento possui, ainda, outras utilidades, tais como acelerar os cálculos e evitar problemas de convergência. De modo que, uma vez implantada no programa, ela pode ser empregada com qualquer um dos propósitos mencionados.

II.4 *Análise da resposta dinâmica*

Na análise da resposta dinâmica é necessário que se obtenha a solução da equação:

$$(II.11) \quad M \cdot \ddot{V}(t) + C \cdot \dot{V}(t) + K \cdot V(t) = P(t)$$

onde $P(t)$ é o vetor (conhecido) de cargas com uma variação arbitrária no tempo, ou de cargas efetivas resultantes de movimentos de base. Especificamente, no caso de movimento de base, o programa SAP-IV admite que a estrutura é uniformemente submetida ao vetor de acelerações de base $\ddot{V}_g(t)$, [6]. De modo que (II.11) reduz-se à forma:

$$(II.12) \quad M \cdot \ddot{V}_r(t) + C \cdot \dot{V}_r(t) + K \cdot V_r(t) = -M \cdot \ddot{V}_g(t)$$

onde $V_r(t) = V(t) - V_g(t)$

$$\dot{V}_r(t) = \dot{V}(t) - \dot{V}_g(t)$$

$$\ddot{V}_r(t) = \ddot{V}(t) - \ddot{V}_g(t)$$

são, respectivamente,

deslocamentos, velocidades e acelerações relativas, entre estrutura e base.

O programa pode calcular o histórico de resposta resultante da solução de (II.11) ou (II.12) ou, ainda, efetuar uma análise espectral na solução de (II.12). A análise do histórico de resposta pode ser executada por dois métodos: superposição modal ou integração direta, que serão apresentados nos itens seguintes. Tanto a análise espectral como a análise de resposta por superposição modal implicam no cálculo prévio das frequências e modos naturais do sistema.

Presentemente, trataremos da solução de (II.11), para a obtenção do histórico de resposta, visando os procedimentos necessários na adaptação do programa à análise de corpos livres. Assim, embora uma análise espectral seja altamente interessante no estudo de vibrações da viga-navio preferimos relacioná-la como sendo um de nossos trabalhos futuros.

II.4.1 Integração direta

O histórico de resposta pode ser obtido pela integração numérica direta da equação de movimento do sistema (II.11), sem transformações preliminares. O método numérico empregado pelo programa é o de integração por etapas - "Wilson - θ Method", [2].

Uma primeira consideração a ser efetuada diz respeito à formulação da matriz de amortecimento. Aqui assume-se o amortecimento de Rayleigh:

$$(II.13) \quad C = a_0 \cdot M + a_1 \cdot K$$

onde a_0 e a_1 são fatores arbitrários de proporcionalidade, que podem ser obtidos a partir de graus de amortecimento conhecidos.

Essa forma de introduzir o amortecimento justifica-se pelo fato de facilitar o desenvolvimento da análise em termos de utilização do computador, uma vez que não são necessários espaços de memória para armazenar a matriz de amortecimento.

A análise da resposta dinâmica de corpos livres, por integração direta de (II.11), pode ser efetuada sem que ocorram problemas de natureza numérica pelo fato de a matriz de rigidez ser singular. No entanto, nesse caso, uma parcela dos deslocamentos obtidos será correspondente aos movimentos de corpo rígido. De modo que, dependendo da natureza da excitação, o histórico de resposta em deslocamentos não apresentará interesse prático.

O histórico de deslocamentos (ou histórico de resposta em deslocamentos) da estrutura pode ser considerado como medida básica de sua resposta ao carregamento dinâmico. Em geral outros parâmetros de resposta, como tensões ou esforços internos desenvolvidos em vários componentes estruturais, podem ser avaliados diretamente dos deslocamentos. Os deslocamentos de corpo rígido não tem influência no cálculo de tensões (pois não estão associados a deformações).

Se considerarmos que o cálculo das frequências naturais de corpos livres realiza-se eficientemente pela aplicação do método exposto em II.2 e II.3 e que, numa análise de resposta por superposição modal a partir dessas frequências, é possível eliminar do processo qualquer influência dos movimentos de corpo rígido na histórico de deslocamentos, então, estabelece-se uma das vantagens do método de superposição modal.

Sem que sejam tecidas considerações apriorísticas sobre vantagens de um método sobre outro, dedicar-nos-emos a exposição do método de superposição modal, com as adaptações julgadas necessárias visando análise de resposta de corpos livres.

II.4.2 *Desacoplamento da equação diferencial matricial* *Sumário do método de superposição modal*

A idéia básica do método de superposição modal reside no aproveitamento das propriedades de ortogonalidade dos modos normais em relação às matrizes de massa e rigidez do sistema, a fim de promover o desacoplamento de (II.11).

Admite-se que a resposta estrutural pode ser descrita adequadamente pelos modos normais normalizados, correspondentes às p mais baixas frequências naturais, através da transformação para coordenadas normais dada por:

$$(II.14) \quad V(t) = \Phi \cdot Y(t)$$

A transformação para as coordenadas normais, que serve para mudar o conjunto de n equações acopladas num conjunto de n equações desacopladas, é a base do método de superposição modal na análise dinâmica. O método pode ser usado para avaliar a resposta dinâmica de qualquer estrutura, com comportamento linear, e para a qual os deslocamentos nodais foram expressos em termos de um conjunto de n coordenadas discretas, e onde o amortecimento pode ser expresso por porcentagens (ou graus) de amortecimento modais. A forma final das equações, em coordenadas normais, desacopladas é:

$$(II.15) \quad \ddot{y}_i(t) + 2 \cdot \xi_i \cdot \dot{y}_i(t) + \omega_i^2 \cdot y_i(t) = \phi_i^T \cdot P(t); \quad i=1, 2, \dots, p$$

No caso particular da análise da resposta dinâmica de corpos livres o método apresenta particular importância, pois é possível, sem grande esforço computacional, eliminar as contribuições indesejáveis de modos de corpo rígido.

Suponhamos que no sistema discretizado as r frequências mais baixas correspondam a modos que não implicam deformações (modos de corpo rígido), com $1 \leq r \leq 6$, (um corpo livre deve ter no mínimo um movimento de corpo rígido e terá no máximo seis), então,

$$(II.16) \quad \lambda_i = 0; \quad i=1,2,\dots,r$$

O método, visando a análise de resposta de corpos livres pelo SAP-IV MODIFICADO, consiste nas seguintes etapas:

(1) Análise das frequências e modos normais, para o sistema em vibrações livres não amortecidas. Como resultados serão obtidas as p mais baixas frequências naturais (incluindo as r frequências nulas) e respectivos modos normais, ortonormalizados em relação à matriz de massa (isto é, $\phi_i^T \cdot M \cdot \phi_i = 1$; |2|, |7|).

(2) Cálculo dos carregamentos generalizados $p_i(t)$

$$(II.17) \quad p_i(t) = \phi_i^T \cdot P(t); \quad i=r+1, r+2, \dots, p$$

Para $i \leq r$, esse cálculo, embora possa ser efetuado, não apresenta interesse. Obviamente, a análise só tem relevância para $p > r$.

(3) Cálculo das respostas modais $y_i(t)$

$$(II.18) \quad \ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \cdot w_i \cdot \dot{y}_i(t) + w_i^2 \cdot y_i(t) = p_i(t);$$

$$i = r+1, r+2, \dots, p$$

A solução de cada uma das equações de (II.18) é equivalente a solução de um sistema de um grau de liberdade, podendo ser obtida por um processo qualquer. Computacionalmente dois processos de solução apresentam interesse; integração por etapas (originalmente adotado no programa, |2|) e integral de Duhamel (usado como subsídio para a implantação de novo método de integração, |11|).

- (4) Resposta em deslocamentos. Quando a resposta modal, para cada modo, $y_i(t)$ foi obtida na solução de (II.18), os deslocamentos serão dados pela transformação de coordenadas normais (II.14):

$$(II.19) \quad V(t) = \sum_{i=r}^p \phi_i \cdot y_i(t)$$

onde as contribuições dos modos correspondentes a movimentos de corpo rígido são eliminadas. Deve ser notado que, para maior parte dos carregamentos da prática, as contribuições de modos de ordem superior tem pouca importância, de modo que p não precisa, necessariamente, ser alto. In da porque a idealização de um sistema estrutural complexo tende a representar os modos de ordem superior com pouca precisão.

- (5) Forças elásticas da resposta. O histórico de deslocamento da estrutura pode ser considerado a medida básica de sua resposta ao carregamento dinâmico. Adicionalmente, a partir do histórico de resposta em deslocamento pode ser avaliado o histórico de resposta em tensões, com cálculo, intermediário, das forças elásticas que resistem à deformação da estrutura.

$$(II.20) \quad F_R(t) = K \cdot V(t)$$

sendo $V(t)$ dado por (II.19), e K a matriz de rigidez do sistema com movimentos de corpo rígido. Portanto, sendo \hat{K} a matriz montada pelo programa, é necessário que a aplicação de (II.20) seja feita na forma de (II.21),

$$(II.21) \quad F_R(t) = (\hat{K} - \beta M) \cdot V(t)$$

Deve ser notado que, para o cálculo das forças elásticas resistentes, é irrelevante a consideração das contribuições dos modos de corpo rígido na composição de $V(t)$, uma vez que estes não estão associados a deformações. No entanto, é computacionalmente mais interessante a aplicação de (II.21), onde são eliminadas tais contribuições.

II.4.3 Integral de Duhamel. Resposta à excitação harmônica

A integração por etapas no método de superposição modal, como exposto em [2] e [11], presta-se, fundamentalmente, à análise de resposta para um carregamento dinâmico genérico (de qualquer natureza: impulsivo, harmônico, periódico, não periódico). No entanto, como cada uma das equações do movimento em coordenadas generalizadas, (II.18), é equivalente a equação de movimento de um sistema de um grau de liberdade, a solução pode ser obtida por qualquer método aplicável a tal sistema.

Um método alternativo, para sistemas subcriticamente amortecidos ($0 < \xi_1 < 1$) e para condições iniciais nulas, pode ser obtido pela solução da integral de Duhamel, [1], [3], [9], em cada modo,

$$(II.22) \quad y_i(t) = \frac{1}{w_{D_i}} \int_0^t p_i(\tau) \cdot e^{-\xi_i w_i(t-\tau)} \operatorname{sen} |w_{D_i}(t-\tau)| d\tau$$

que é uma integral de convolução, paramétrica na variável tempo, t . E onde

$$(II.23) \quad w_{D_i} = w_i \cdot \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (\text{frequência natural amortecida})$$

$$(II.24) \quad p_i(t) = \phi_i^T \cdot P(t) \quad (\text{rep. (II.17)})$$

sendo os modos normais (ϕ_i) ortonormalizados em relação à matriz de massa do sistema (M).

Para um carregamento dinâmico genérico a solução da integral de convolução (II.22) deve ser obtida numericamente num algoritmo de eficiência inteiramente equivalente à da integração por etapas, |3|; de sorte que não se justifica o desenvolvimento do mesmo. No entanto, no caso especial de carregamentos harmônicos, um algoritmo bem mais eficiente pode ser desenvolvido, o que, para análise de sistemas onde grande parte das excitações de importância são harmônicas (como no navio), é vantajoso.

Apresentaremos neste item um método de solução para as equações (II.18), no caso de excitação harmônica, por nós implantado no programa SAP-IV.

Consideremos o caso simplificado de um único esforço nodal variando harmonicamente, de modo que o vetor de cargas é dado por:

$$(II.25) \quad P(t) = \bar{P} | a \text{ sen}(\bar{\omega}t + \delta) + b |$$

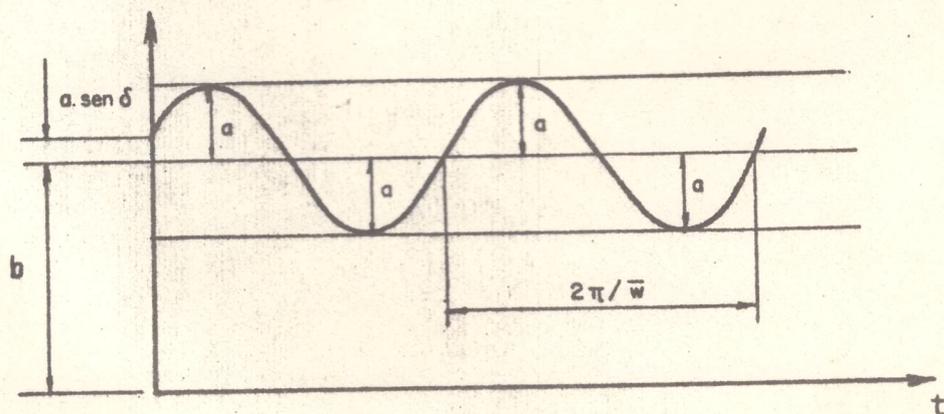


Fig.II.2-Lei de variação para o esforço harmônico

onde

- \bar{w} - frequência do esforço de excitação
- a - amplitude do esforço de excitação
- b - valor médio do esforço de excitação
- \bar{P} - vetor (n x 1) com todos os elementos nulos, exceto o elemento unitário correspondente ao grau de liberdade segundo o qual está sendo aplicada a excitação.

Então, a carga generalizada (II.24) pela aplicação de (II.25) é dada por,

$$(II.26) \quad p_i(\tau) = d_1 | a \cdot \text{sen}(\bar{w}\tau + \delta) + b |$$

onde

$$(II.27) \quad d_1 = \phi_i^T \cdot \bar{P}$$

Introduzindo (II.26) em (II.22), após algumas transformações algébricas, chegamos a,

$$(II.28) \quad y(t) = d_1 \left\{ \frac{b}{w^2} + \frac{a}{w_D} (d_{19} \cdot \text{sen } w_D t + d_{20} \cdot \text{cos } w_D t) + e^{-\xi w t} \cdot (d_{23} \cdot \text{sen } w_D t + d_{24} \cdot \text{cos } w_D t) \right\}$$

$$(II.29) \quad \dot{y}(t) = d_1 \left\{ \frac{a}{w_D} (d_{27} \cdot \text{sen } w_D t + d_{28} \cdot \text{cos } w_D t) + e^{-\xi w t} \cdot (d_{31} \cdot \text{sen } w_D t + d_{32} \cdot \text{cos } w_D t) \right\}$$

$$(II.30) \quad \ddot{y}(t) = d_1 \cdot \left\{ \frac{a}{w_D} (d_{29} \cdot \text{sen } w_D t + d_{30} \cdot \text{cos } w_D t) + e^{-\xi w t} (d_{33} \cdot \text{sen } w_D t + d_{34} \cdot \text{cos } w_D t) \right\}$$

onde os índices i foram omitidos a fim de evitar superposição de símbolos.

Os coeficientes d_{19} , d_{20} , d_{27} , d_{28} , d_{29} , d_{30} , dependentes do tempo; d_{23} , d_{24} , d_{31} , d_{32} , d_{33} e d_{34} , não dependentes do tempo, encontram-se definidos na tabela II.1.

Assim, a terceira etapa do método de superposição modal, sumarizado em II.4.2, é efetuada, para excitação harmônica conforme aqui admitida e condições iniciais nulas, como a seguir:

(3) Cálculo das respostas modais; $i=r+1, r+2, \dots, p$

(3.1) - Cálculo da amplitude do esforço generalizado (d_1) por (II.27).

(3.2) - Cálculo da frequência natural amortecida (w_{Di}) por (II.23)

(3.3) - Cálculo dos coeficientes de integração que não dependem do tempo, vide tabela II.1

(3.4) - Para cada instante $t=j.\Delta t$ ($j=0,1,2,\dots,J$), com J e Δt fornecido pelo usuário. Cálculo dos coeficientes de integração que dependem do tempo (tabela II.1) e do deslocamento, velocidade e aceleração modais por (II.28), (II.29) e (II.30), respectivamente.

Finalizando é importante acrescentar que:

i - o método é numericamente preciso, sem apresentar os problemas de precisão computacional de uma integração por etapas, [2], [11]. Aqui o

intervalo de tempo Δt não tem influência alguma na precisão da resposta, ao contrário do que ocorre na integração por etapas.

ii - como estamos tratando da análise de sistemas estruturais com comportamento linear vale o princípio da superposição. De modo que a limitação inicialmente imposta (um único esforço nodal harmônico) pode ser facilmente contornada, no caso de várias excitações harmônicas com diferentes parâmetros (frequências, amplitudes, etc.), por superposição de efeitos.

III. *Teste de confiabilidade para o programa modificado*

Para que as modificações introduzidas no programa SAP-IV, e apresentadas no capítulo II, fossem verificadas (antes da análise num problema real) analisaremos um caso simples de solução analítica conhecida.

Consideremos a barra da figura III.1 sob as seguintes hipóteses:

- i. barra de secção constante e perfeitamente reta.
- ii. distribuição uniforme de massa.
- iii. amortecimento estrutural do tipo viscoso.
- iv. considerar-se-á, apenas, deformações por compressão tração.
- v. sem vinculação (corpo livre).

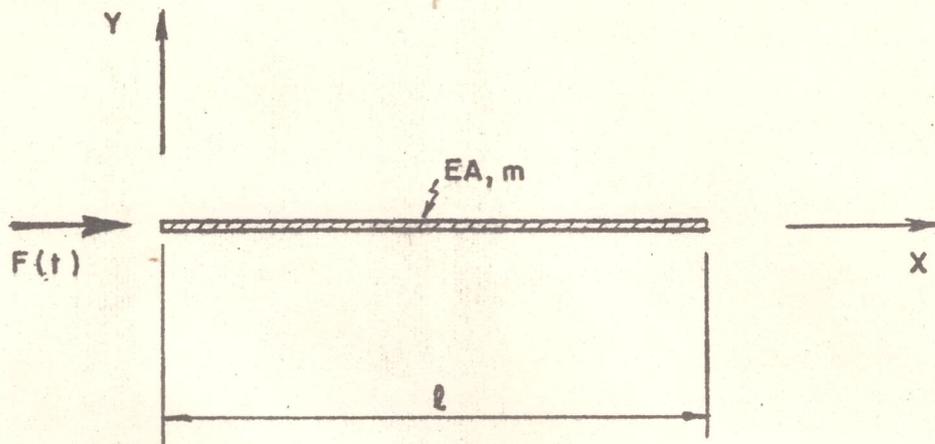


FIGURA III.1 - Análise de vibrações de uma barra livre.

sendo, $F(t) = 10.\text{sen}(80.\pi.t)$ - excitação

- EA - rigidez à compressão-tração ($EA=6,084 \times 10^4$ ton)
- m - densidade linear de massa ($m = 0,4 \text{ ton.s}^2/\text{m}^2$)
- l - distância entre extremos ($l = 6 \text{ m}$)

III.1 Soluções analítica e manual

Como resultados da solução analítica [9] (considerando distribuição contínua de massa e rigidez) temos: modos e frequências naturais não amortecidos (tabela III.1); resposta em deslocamento da secção de abscissa $x=4\text{m}$, sob a ação de $F(t)$, obtida por superposição modal com a inclusão, apenas, do segundo modo (primeiro com deformação) subcriticamente - amortecido ($\xi_2=0,2$), Figura III.2.

Para a barra da Figura III.1, discretizada como in

dica a Figura III.3, fizemos o cálculo manual, na análise dinâmica, através do emprego das técnicas apresentadas no capítulo II. Com resultados indicados em: Tabela III.2 - modos e frequências naturais não amortecidos; Figura III-2 - resposta em deslocamento do nó de abscissa $x=4$, com a inclusão, apenas, do segundo modo subcriticamente amortecido ($\xi_2=0,20$).

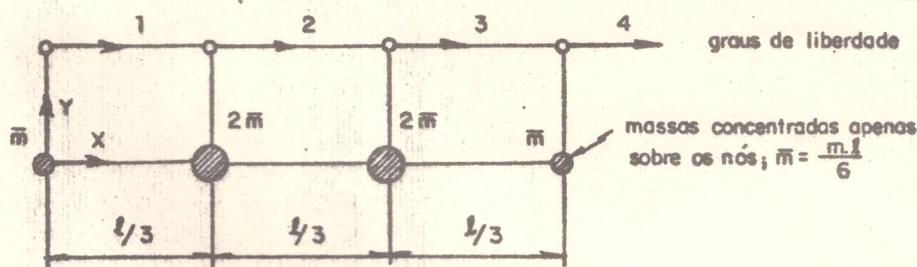


Figura III.3 - Barra livre discretizada

Na figura III.2 observa-se que as diferenças entre a solução analítica e a solução apresentada no parágrafo anterior, se consideradas razões de ordem prática, não comprometem a viabilidade de emprego do método proposto, sendo perfeitamente aceitáveis. No entanto, a resposta total do sistema deve ser obtida pela inclusão de um maior número de modos (respostas modais). Nesse aspecto o modelo de 4 massas não fornecerá uma boa aproximação, já que frequências de ordem superior a dois são aproximações precárias para as frequências naturais do sistema (vide tabela III.3), além de não se poder incluir modos de ordem superior a 4.

No caso particular estudado neste capítulo, as diferenças entre respostas obtidas analiticamente e pelo método

do apresentado em II.4.3 são decorrentes, unicamente, do erro cometido na avaliação de frequências naturais. Assim, uma vez que apenas o transiente depende das frequências naturais, seria esperada a ocorrência de erros de aproximação apenas enquanto este fosse parcela significativa no computo da resposta. No entanto, como observa-se na Figura III.2, o erro persiste mesmo após ter desaparecido o transiente. Justifica-se tal fato já que, na formulação do método apresentado em II.4.3, a parcela da resposta correspondente ao regime permanente depende apenas indiretamente da frequência de excitação; sendo calculada via frequência natural. De modo que os mesmos erros estender-se-ão até o regime permanente.

Embora, pelo motivo exposto no parágrafo anterior, possamos estabelecer uma limitação do método, o seu emprego é plenamente aceitável. Uma vez que numa análise, em primeiro lugar, deve-se minimizar os erros cometidos no cálculo das aproximações das frequências naturais, discretizando o sistema original de modo adequado. Como consequência disso a aproximação obtida para a resposta será, na prática, plenamente satisfatória (vide figura III.4).

III.2 *Comparação de resultados*

Submetemos à análise pelo programa SAP-IV MODIFICADO o sistema da Figura III.1, segundo as seguintes discretizações:

1. Modelo da Figura III.3 (4 massas).
2. Modelo com treze massas (concentradas) equiespa

çadas, com mesmo lei de formação do modelo da Figura III.3 (13-massas).

3. Modelo com vinte e cinco massas (concentradas) equiespaçadas, com mesma lei de formação do modelo da Figura III.3 (25-massas).

Na Tabela III.3 apresentamos os resultados obtidos no cálculo das aproximações para as frequências naturais. É importante notar que os erros relativos (em relação à solução analítica) são sempre negativos de modo que obtivemos, sempre, aproximações inferiores para os valores do sistema não discretizado. De modo geral, numa análise por elementos finitos, obtêm-se limites superiores para as frequências do sistema discretizado e, dependendo da discretização efetuada, obtêm-se aproximações superiores ou inferiores para as frequências do sistema original (não discretizado). Deve-se notar, também, que os resultados obtidos pelo programa, no modelo de 4 massas, foram exatamente iguais aos da solução manual (frequências e modos), fato que atesta o acerto dos comandos introduzidos no programa.

Os mesmos modelos foram submetidos à excitação harmônica, empregada no item anterior, e analisados pelo programa. Na Figura III.4 mostramos os resultados obtidos (quando considerada apenas a influência do segundo modo na resposta) sendo que as soluções para o modelo 4-massas, manual e pelo programa, são exatamente as mesmas. Enquanto as soluções para os modelos 13-massas e 25-massas coincidem, tendo em vista a precisão do gráfico. Se, como já mencionado em parágrafo pre

cedente, a resposta do modelo 4-massas pode ser considerada satisfatória, para o modelo 13-massas (e 25-massas), dentro da precisão do gráfico, pode ser considerada exata, por coincidir com a solução analítica. Porém, uma melhor aproximação para a resposta do sistema pode ser obtida pela inclusão, na superposição modal, de modos de ordem superior a dois.

A Figura III.5 apresenta as respostas dos modelos, sendo que agora estão incluídas as influências de modos superiores (respeitada a limitação de incluir respostas modais para as quais frequências e modos foram calculados com precisão pré-estabelecida).

Finalizando, é importante que se faça uma análise comparativa dos tempos de processamento envolvidos. Verificou-se que é a etapa de extração de autovalores a responsável pelo maior consumo de tempo. De modo que se torna irrelevante o tempo consumido no cálculo específico da resposta quando o número de graus de liberdade é, comparativamente, elevado. Já observamos em parágrafo anterior que, tendo em vista a precisão obtida na análise do problema, os modelos de 13 e 25 massas são inteiramente equivalentes, assim, conclui-se que o grau de refinamento para o sistema discretizado deve ser estabelecido de modo a compatibilizar precisão necessária para a resposta e custos de processamento. Portanto, no presente caso, o modelo de 13 massas supera os demais.

As conclusões ora apresentadas podem ser úteis numa análise de outros sistemas e devem ser consideradas, principalmente, no caso em que se tenha um grande número de graus de

liberdade. Ou seja, na preparação do modelo é necessário, também, que se considere o aspecto computacional de modo a não tornar inviável, em termos de custos e capacidade do computador, a análise do modelo pelo emprego do programa.

IV. *Comentários gerais e recomendações para trabalhos futuros*

Com o intuito de relacionar os tópicos abordados no presente trabalho, que requerem comentários ou necessitam estudos adicionais, dividimos a apresentação deste capítulo nos itens que se seguem.

IV.1 *Quanto ao estado da arte.*

O estudo racional de um determinado problema dinâmico recai, na maioria das vezes, em problemas matemáticos de difícil solução. Como consequência, às hipóteses empregadas no estabelecimento do modelo físico adicionam-se hipóteses necessárias na solução matemática; por esta razão só alguns casos simples possuem solução analítica que represente, com razoável fidedignidade, o comportamento vibratório do sistema. Como exemplo pode-se citar o caso de obtenção de solução analítica para a vibração da viga navio considerando-se os aspectos de importância (tais como: rigidez variável ao longo do vão), pois, embora seja possível estabelecer a equação diferencial representativa do fenômeno, esta não será passível de solução se hipóteses adicionais não forem formuladas e mesmo assim, somente através de um processo numérico chegar-se-á a algum resultado.

Do exposto no parágrafo anterior depreende-se a importância da análise matricial por elementos finitos que, partindo da discretização inicial do sistema, pode fornecer soluções satisfatórias tanto nos casos onde seria possível encontrar solução analítica aproximada, como nos que, por sua complexibilidade, não tem solução analítica; ampliando, desse modo, a gama de problemas dinâmicos que podem ser resolvidos.

No estado atual da arte, especificamente dentro do campo de análise de vibrações em navios, existem muitas perguntas em aberto consumindo o esforço de muitos centros de pesquisa na procura de suas respostas. Não se atingiu, ainda, o ponto desejado de poder prever e evitar vibrações indesejáveis já na fase de projeto, tal que grande trabalho é dispendido na cura de vibrações indesejáveis com o navio já em operação. ..

Não é necessário nossa referência pessoal para reforçar a importância crescente do método dos elementos finitos. Para isto basta verificar sua larga aceitação e emprego em todo o mundo. Apesar de exigir material técnico sofisticado (computadores de grande porte, sistemas gráficos, especialistas, etc), com conseqüente custo elevado, justifica -se plenamente o seu emprego tendo em vista que qualquer outro processo utilizado na solução de determinado problema dinâmico, razoavelmente complexo, envolverá recurso econômico, no mínimo, igualmente elevado. Deve-se, porém, considerar os seguintes aspectos quanto ao emprego do método:

- (1) é uma ferramenta sofisticada que deve ser operada

por um especialista com o máximo de conhecimento possível a respeito das limitações que terá de enfrentar, de modo a poder utilizá-la com eficiência. A tendência inicial de um analista não familiarizado com o método é de promover uma discretização com grau de refinamento muitas vezes maior do que o necessário para a obtenção de resultados satisfatórios. Com esse procedimento estará ele, certamente, estabelecendo condições para uma boa análise em termos de resultados numéricos, porém, terá grande probabilidade de esbarrar em problemas econômicos (custo do processamento) e de capacidade do computador, que podem vir a impedir o andamento da referida análise. Um exemplo, que ilustra o comentário, pode ser observado na análise da barra - do capítulo III deste trabalho, onde percebe-se a não necessidade de um refinamento superior ao do modelo de 13-massas, pois o modelo de 25-massas, apesar de custar 50% mais caro (em termos de tempo de processamento), não forneceu uma melhora sensível na qualidade dos resultados (vide Figura III.5).

- (2) a existência do método não reduz a importância da análise experimental, uma vez que esta última continuará sendo útil na avaliação dos efeitos das hipóteses introduzidas no modelo físico. É extremamente importante que se possa dispor do estudo experimental de modo a promover a calibragem dos modelos de análise; pois as discrepâncias entre resultados, de um e de outro, fornecem subsídios para a orientação de linhas de pesquisa que visem estabelecer requisitos de minimização dos efeitos indesejáveis de correntes das hipóteses assumidas, bem como da discretização do sistema.

IV.2 Quanto à capacidade atual do programa.

Dispomos atualmente de um sistema de análise apto ao cálculo das respostas dinâmicas de sistemas discretizados sob a ação de excitações determinísticas. Adicionalmente, o potencial existente permite que se visualize alguns trabalhos futuros:

- (1) no cálculo da resposta por superposição modal a maior parcela do custo deve-se ao tempo gasto na extração de autovalores. Se, a priori, são conhecidas formas modais aproximadas, o número de iterações do método, até a convergência, pode ser substancialmente reduzido com conseqüente redução no tempo de processamento. Por outro lado, no cálculo específico da resposta (se já não conhecidos os modos e frequências naturais) o tempo de processamento consumido é irrelevante quando comparado ao tempo gasto no cálculo de autovalores e respectivo autovetores. Assim, os custos da análise podem ser substancialmente reduzidos caso se disponha de um sistema operacional capaz de armazenar resultados de execuções anteriores do programa. Utilizando-os em novas execuções quer seja no recálculo de modos e frequências naturais (no caso de se alterar a discretização ou algumas propriedades da estrutura) quer seja no cálculo de respostas adicionais que completem os resultados anteriormente obtidos.
- (2) a natureza de determinados esforços de excitação indica que a análise vibratória do sistema será mais eficiente se for encaminhada considerando o caráter aleatório (não determinístico) desses mesmos esforços (caso da análise de vibrações decorrentes do movimento do navio em mar irregular). Então, é interessante que se disponha de um sistema

de programas visando a análise expectral no estudo de vibrações aleatórias. Com tal finalidade dois programas devem compor o sistema de análise: o primeiro que se encarregaria da determinação das propriedades dos espectros de sollicitação e dos esforços internos na estrutura devido aos movimentos de corpo rígido; o segundo que, a partir do referido espectro de sollicitação, determine os esforços internos devidos às deformações, compondo os resultados com os anteriores e tendo como saída o espectro de resposta. Atualmente o N.D.P.N. (Núcleo de Desenvolvimento e Pesquisa do Navio) dispõe de potencial que permite a implantação desse sistema - através dos programas, já implantados, SEAKEEPING e SAP-IV MODIFICADO (NAVSAP).

V. Referências bibliográficas

- [1] VENÂNCIO Fº, F.. Notas de aula do curso "PEF-768 Dinâmica das estruturas" São Paulo, Escola Politécnica da USP , 1976.
- [2] WILSON, E.L. & BATHE;K.J.. Numerical methods in finite analisys. led., Englewood Cliffs, New Jersey.Prentice-Hall, 1976.
- [3] CLOUGH,R.W. & PENZIEWN,J.. Dynamics of structures. led., New York, Mc.Graw-Hill, 1975.
- [4] ZIENKIEWSCZ, O.C. The finite element method in engineering science.2ed. London, Mc.Graw-Hill, 1971.
- [5] GERE,J.M. & WEAVER Jr., W.. Analysis of framed structures. led., Princeton, New Jersey, 1965.
- [6] WILSON,E.L. et alii. SAP-IV - A structural analysis program for static and dynamics response of linear systems.Berkeley, University of California, 1974.
- [7] DIAS,C.A.N. & SALVAGNI, R.B., Métodos para cálculo de frequências naturais e modos de vibração de sistemas estruturais./Seminário apresentado no curso "PEF-768 Dinâmica das Estruturas/. São Paulo, Escola Politécnica da USP, 1977.
- [8] DEN HERTOOG,J.P. Vibrações nos sistemas mecânicos. Tradução de Amorelli, M.O.C., Editora da USP, Mc.Graw-Hill , 1956.

- |9| TIMOSHENKO,S E YOUNG,D.H. E WEAVER,Jr.,W.. Vibrations Problems in Engineering. 4 ed. JOHN WILEY E SONS , New York, 1972.
- |10| HURTY,W.C. & RUBINSTEIN,M.F. Dynamics of Structures. New Jersey, Prentice-Hall, 1964.
- |11| DIAS, C.A.N.. Introdução ao Estudo de Vibrações da Viga Navio. Técnica dos elementos Finitos. Adaptação do programa SAP.IV./Dissertação de Mestrado/EPUSP, 1978.

LISTA DE FIGURAS E TABELAS
LIST OF FIGURES AND TABLES

	page
Figure II.1 - Modal node springs.	10
Figura II.2 - Time varying harmonic load.	20
Table II.1 - Coefficients to the integration - harmonic load.	37
Figure III.1 - Vibrations analysis of a free bar	24
Figure III.2 - Free bar Forced vibrations - analytical solution.	39
Figure III.3 - Free bar discretization - lumped mass matrix	25
Free bar mode shapes and natural frequencies	
Table III.1 - Analytical solution	38
Table III.2 - Manual solution - 4 mass discretization . .	38
Table III.3 - Program solution-4,13 and 25 mass discretization	38
Free bar forced vibration - 4,13 and 25 mass discretization	
Figura III.4 - Program solution - considering only the second normal response in the mode superposition	39
Figura III.5 - Program solution - including high order normal responses in the mode superposition	39

TABELA 11.1 - Coeficientes de integração no caso de excitação harmônica

Coeficientes que não dependem do tempo			
d_2	$w + w_D$		
d_3	$w - w_D$		
condições de ressonância e amortecimento			
sem ressonância ($d_3 \neq 0$)		com ressonância ($d_3 = 0$)	
	sem amortecimento ($\xi = 0$)	com amortecimento ($\xi \neq 0$)	com amortecimento ($\xi \neq 0$)
d_4	0	$\xi w / d_2$	$\xi w / d_2$
d_5	0	$\xi w / d_3$	0
d_6	$1 / (2 \cdot d_2)$	$1 / (2 \cdot d_2 (d_4^2 + 1))$	$1 / (2 \cdot d_2 (d_4^2 + 1))$
d_7	$1 / (2 \cdot d_3)$	$1 / (2 \cdot d_3 (d_5^2 + 1))$	0
d_8	0	$d_4 \cdot d_6$	$d_4 \cdot d_6$
d_9	0	$d_5 \cdot d_7$	0
α	0	0	$1 / (2\xi w)$

d_{10}	$\xi \sqrt{1 - \xi^2}$	$d_6 \text{ sen } \delta + d_8 \text{ cos } \delta$
d_{11}		$d_7 \text{ sen } \delta + d_9 \text{ cos } \delta$
d_{12}	$d_7 \text{ sen } \delta + d_9 \text{ cos } \delta$	$d_8 \text{ sen } \delta - d_6 \text{ cos } \delta$
d_{13}		$d_8 \text{ sen } \delta - d_6 \text{ cos } \delta$
d_{14}	$d_9 \text{ sen } \delta - d_7 \text{ cos } \delta$	$-(d_{13} + d_{14})$
d_{17}		$-(d_{13} + d_{14})$
d_{18}	$d_{12} - d_{11}$	$d_{17} - \alpha \cdot \text{sen } \delta$
d_{21}		$d_{17} - \alpha \cdot \text{sen } \delta$
d_{22}	$d_{18} + \alpha \cdot \text{cos } \delta$	$-b/w^2 \cdot d_{10} + a/w_D \cdot d_{21}$
d_{23}		$-b/w^2 \cdot d_{10} + a/w_D \cdot d_{21}$
d_{24}	$-b/w^2 + a/w_D \cdot d_{22}$	$-\xi w \cdot d_{23} - w_D \cdot d_{24}$
d_{31}		$-\xi w \cdot d_{23} - w_D \cdot d_{24}$
d_{32}	$-\xi w \cdot d_{24} + w_D \cdot d_{23}$	$-\xi w \cdot d_{31} - w_D \cdot d_{32}$
d_{33}		$-\xi w \cdot d_{31} - w_D \cdot d_{32}$
d_{34}	$-\xi w \cdot d_{32} + w_D \cdot d_{31}$	

Coeficientes que dependem do tempo	
\bar{d}_{11}	$d_{11} \text{ sen } d_2 t + d_{13} \text{ cos } d_2 t$
\bar{d}_{12}	$d_{12} \text{ sen } d_3 t + d_{14} \text{ cos } d_3 t$
\bar{d}_{13}	$-d_{13} \text{ sen } d_2 t + d_{11} \text{ cos } d_2 t$
\bar{d}_{14}	$-d_{14} \text{ sen } d_3 t + d_{12} \text{ cos } d_3 t$
d_{15}	$\bar{d}_{11} + \bar{d}_{12}$
d_{16}	$\bar{d}_{13} - \bar{d}_{14}$
d_{19}	$d_{15} + \alpha \text{ sen } \delta$
d_{20}	$d_{16} - \alpha \cdot \text{cos } \delta$
d_{25}	$d_2 \bar{d}_{13} + d_3 \bar{d}_{14}$
d_{26}	$-d_2 \bar{d}_{11} + d_3 \bar{d}_{12}$
d_{27}	$d_{25} - w_D \cdot d_{20}$
d_{28}	$d_{26} + w_D \cdot d_{19}$
d_{29}	$- d_2^2 \bar{d}_{11} + d_3^2 \bar{d}_{12} + w_D (d_{26} + d_{29}) $
d_{30}	$- d_2^2 \bar{d}_{13} - d_3^2 \bar{d}_{14} - w_D (d_{25} + d_{27}) $

Tabela III.1 Freqüências e modos naturais para a barra da Figura III.1 . Solução analítica

i=	1	2	3	4	5	
w_i^2 (rad/s ²)	0	41.699,079	166.796,31	375.291,71	667.185,26	
w_i (rad/s)	0	204,20	408,41	612,61	816,81	
$\phi_i(x)$	x = 0	0,6455	+ 0,9129	+ 0,9129	+ 0,9129	+ 0,9129
	x = 2	0,6455	+ 0,4564	- 0,4564	- 0,9129	- 0,4564
	x = 4	0,6455	- 0,4564	- 0,4564	+ 0,9129	- 0,4564
	x = 6	0,6455	- 0,9129	+ 0,9129	- 0,9129	+ 0,9129

TABELA III.2 - Freqüências e modos naturais para a barra da Figura III.1, discretizada como indica a Figura III.3 (4-Massas). Técnica dos elementos finitos.

Modo	1	2	3	4	
λ_i (rad/s ²)	0	38.025,000	114.075,00	152.100,00	
w_i (rad/s)	0	195,00	337,75	390,00	
ϕ_i	x = 0	0,6455	+ 0,9129	+ 0,9129	+ 0,6455
	x = 2	0,6455	+ 0,4564	- 0,4564	- 0,6455
	x = 4	0,6455	- 0,4564	- 0,4564	+ 0,6455
	x = 6	0,6455	- 0,9129	+ 0,9129	- 0,6455

TABELA III.3 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS - FREQUÊNCIAS NATURAIS

$$\text{erro (\%)} = \frac{w - w_{\text{analítica}}}{w_{\text{analítica}}} \cdot 100\% \text{ (ao)}$$

SOLUÇÃO	modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Analítica	valor (rad/s)	0,00	204,20	408,41	612,61	816,81	1021,0	1225,2	1429,4	1633,6	1837,8	2042,0	2246,2
	erro (%)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Manual (***) 4 - massas	valor (rad/s)	0,00	195,00	337,75	390,00	-	-	-	-	-	-	-	-
	erro (%)	0,00	-4,51	-17,30	-36,34	-	-	-	-	-	-	-	-
programa (***) 4 - massas	valor (rad/s)	0,00	195,00	337,75	390,00	-	-	-	-	-	-	-	-
	erro (%)	0,00	-4,51	-17,30	-36,34	-	-	-	-	-	-	-	-
programa 13 - massas	valor (rad/s)	0,00	203,62	403,76	597,00	780,00	949,67	1103,2	1237,7	1350,9	1446,4	1507,0	1560,1
	erro (%)	0,00	-0,28	-1,14	-2,55	-4,51	-6,99	-9,96	-13,41	-17,31	-21,30	-26,20	-30,55
programa 25 - massas	valor (rad/s)	0,00	204,05	407,24	608,68	807,52	1002,9	1194,0	1380,0	1560,0	1733,4	1899,3	2057,2
	erro (%)	0,00	-0,07	-0,29	-0,64	-1,14	-1,77	-2,55	-3,46	-4,51	-5,68	-6,99	-8,41

(*) No método de iteração por subespaço apenas p freqüências (p=max{n/2 ; n-8}) podem ser calculadas com precisão pré-especificada.

(**) Os erros foram calculados em relação ao sistema não discretizado, solução analítica exata, item III.1.

(***) Mesmos resultados

FIG. III.2 - SOLUÇÃO ANALÍTICA - BARRA DA FIG. III.1
SUPERPOSIÇÃO MODAL - APENAS 2º MODO

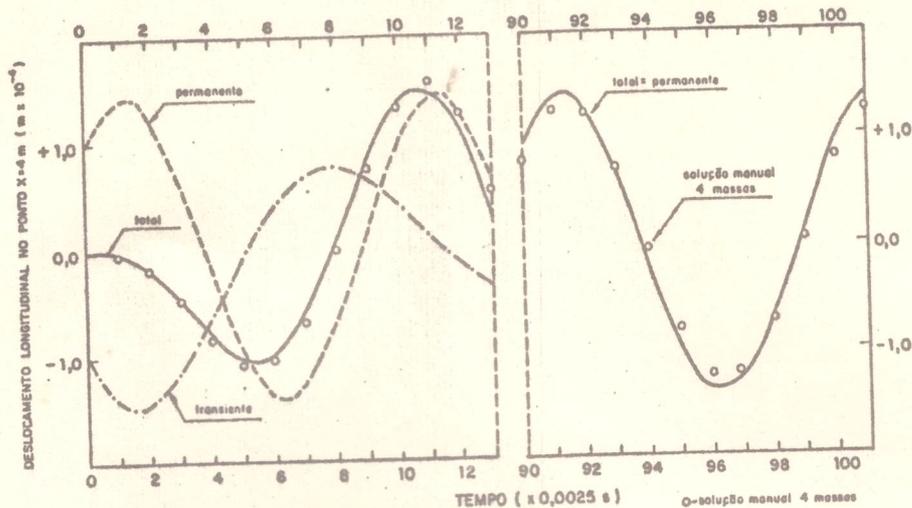


FIG. III.4 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS - ANALÍTICO x PROGRAMA
SUPERPOSIÇÃO MODAL - APENAS 2º MODO

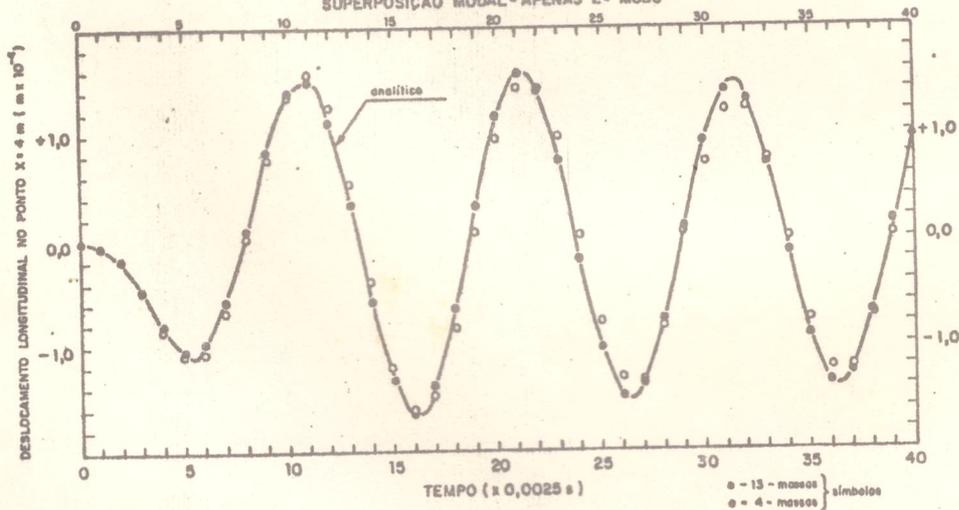


FIG. III.5 - RESULTADOS DO PROGRAMA
SUPERPOSIÇÃO MODAL

